



KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS SISWA ALIYAH MENGUNAKAN INDUKSI MATEMATIKA

Ira Purwandari
MAN 4 Jombang
irapurwandari1@gmail.com

Abstrak: Induksi matematika merupakan salah satu materi matematika yang membutuhkan penalaran dan kecermatan siswa. Induksi matematika merupakan salah satu teknik atau metode pembuktian dasar dalam matematika yang harus dipahami sejak awal yang memerlukan metode pembuktian dalam penyelesaiannya. Seseorang dikatakan mempunyai penalaran dan kecermatan yang baik jika memiliki kemampuan pembuktian matematis yang baik pula. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan kemampuan pembuktian matematis siswa Aliyah dalam menyelesaikan masalah menggunakan induksi matematika ditinjau dari tingkat kemampuan kognitif. Pendekatan penelitian yang digunakan adalah kualitatif deskriptif. Subjek penelitian adalah empat siswa kelas XI MAPK MAN 4 Jombang yang dipilih menggunakan teknik *simple random sampling* yang masing – masing terdiri dari dua siswa dengan kemampuan kognitif tinggi dan kemampuan kognitif rendah berdasarkan hasil penilaian harian materi induksi matematika. Data dikumpulkan melalui tes pembuktian induksi matematika dan wawancara mendalam untuk mengetahui pemahaman konseptual siswa pada setiap langkah pembuktian. Hasil penelitian menunjukkan bahwa siswa dengan kemampuan kognitif tinggi mampu menyelesaikan langkah dasar dan langkah induksi dengan benar meskipun belum sepenuhnya sistematis, terutama pada penulisan asumsi benar untuk $n = k$ dan pembuktian untuk $n = k + 1$. Sementara itu, siswa dengan kemampuan kognitif rendah hanya mampu menyelesaikan langkah dasar dan mengalami kesulitan pada langkah induksi karena kurang memahami keterkaitan antara tahap asumsi dan pembuktian berikutnya. Kesimpulan penelitian ini menunjukkan adanya perbedaan kemampuan pembuktian matematis antara siswa dengan kemampuan kognitif tinggi dan rendah.

Kata kunci: : Kemampuan Pembuktian Matematis, Induksi matematika

PENDAHULUAN

Matematika dalam memecahkan masalah dapat melatih siswa untuk bertindak atas dasar pemikiran secara logis, rasional, kritis, cermat, jujur, efisien, dan efektif. Sebagai ilmu pengetahuan yang menggunakan nalar dan logika dalam memahaminya, matematika sangat berkaitan erat dengan meyakini kebenaran dari suatu pernyataan. Keyakinan tersebut tidak secara spontan langsung menjadi

sebuah patokan kebenaran melainkan harus dilakukan pembuktian matematis terlebih dahulu. Pembuktian matematis merupakan pondasi dari matematika dan bagian yang fundamental, sebuah pernyataan matematika bisa dikatakan benar atau salah bergantung pembuktiannya (CadwalladerOlsker, 2011). Pembuktian matematis adalah suatu proses yang mencakup argument dan rangkaian pemikiran matematis. Proses tersebut akan



berbeda untuk pembanding yang berbeda pula (CadwalladerOlsker, 2011). Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan haruslah didasarkan pada kebenaran konsep atau pernyataan sebelumnya, sehingga kaitan antar konsep atau pernyataan matematika bersifat konsisten (Indah & Nuraeni, 2021).

Materi matematika yang membutuhkan penalaran dan kecermatan siswa salah satunya adalah induksi matematika. Induksi matematika merupakan salah satu teknik atau metode pembuktian dasar dalam matematika yang harus dipahami sejak awal karena akan digunakan pada materi matematika selanjutnya (Hasan, 2016). Induksi matematika merupakan materi yang memerlukan metode pembuktian dalam penyelesaiannya. Penggunaan induksi matematika dapat dilakukan untuk membuktikan suatu pernyataan kebenaran untuk setiap bilangan bulat. Induksi matematik Hine (2017) menyatakan bahwa induksi matematika adalah metode argumen bukti yang didasarkan pada rekursi dan digunakan untuk membuktikan dugaan yang mengklaim bahwa pernyataan tertentu benar untuk bilangan bulat dari beberapa variabel. Harus ada penekanan pada pemahaman konsep untuk memahami pembuktian dengan menggunakan induksi matematika sehingga pembuktian tidak terlalu teknis (Ashkenzi & Itzkovitch, 2014).

Dalam pembuktian dengan menggunakan induksi matematika, terdapat

dua langkah (Michaelson, 2008) yang terdiri dari :

1. Langkah Dasar (*Basic Step*)

Tunjukkan bahwa $P(n)$ benar dengan P adalah identitas yang akan dibuktikan dan n adalah bilangan asli pertama yang identitasnya benar; dan

2. Langkah Induksi (*Induction step*)

Seandainya $P(k)$ benar untuk setiap $k \geq n$, maka tunjukkan $P(k+1)$ adalah benar.

Dalam induksi matematika, pengkonstruksian bukti yang terjadi dimulai dari langkah pertama yang menunjukkan suatu barisan atau pernyataan (misal dilambangkan dengan $P(n)$) benar ketika n dimisalkan dengan salah satu bilangan asli, hal ini tergantung pernyataan yang ada dalam soal; langkah kedua diasumsikan benar untuk $n=k$; dan langkah ketiga pembuktian $P(n)$ benar untuk $n = k + 1$, pada langkah ini dibutuhkan pemikiran yang mendalam untuk mencari ide-ide maupun gagasan yang kemudian disusun sampai ditemukannya respon kebenaran $P(n)$ untuk $n=k+1$ tersebut (Taufik, 2016). Prinsip induksi matematika adalah misalkan $P(n)$ adalah pernyataan yang berkaitan dengan bilangan asli n , untuk $n=1$ dibuktikan $P(1)$ benar, kemudian diasumsikan pernyataan berlaku untuk $n=k$, yaitu $P(k)$ benar, dengan $k \in A$, maka untuk $n = k+1$ harus dibuktikan bahwa $P(k+1)$ benar. Setelah itu dapat disimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua n .



Beberapa penelitian berkaitan dengan induksi matematika menyatakan bahwa banyak siswa mengalami kesulitan menyelesaikan soal induksi, sehingga siswa seringkali melakukan kesalahan dalam menyelesaikannya, (Ashkenazi & Itzkovitch, 2014) menyatakan bahwa terdapat tiga masalah utama siswa dalam membuktikan induksi matematika, diantaranya adalah ketidakpahaman terhadap bukti deduktif, ketidaklengkapan pemahaman terhadap makna basis induksi, dan ketidakpahaman terhadap kenaikan, maksudnya jika suatu pernyataan akan dibuktikan untuk sembarang bilangan asli n , maka kenaikannya adalah 1. Jenis kesalahan pembuktian matematika yang dilakukan siswa menengah dalam induksi matematika yaitu kesalahan mulai dari langkah ketiga dan setelahnya (transformasi keterampilan proses dan penulisan jawaban) hal ini disebabkan siswa kurang mampu dalam menggunakan pengasumsian pada langkah induksi (Ahmadi et al., 2019). Penelitian yang dilakukan oleh (Ernawati & Ilhamuddin, 2020) diperoleh jenis kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan masalah induksi matematika meliputi kesalahan konsep, prosedur, dan Teknik. Jenis kesalahan paling banyak yang dilakukan siswa sekolah menengah adalah segala hal yang berkaitan dalam menyelesaikan pembuktian induksi matematika yaitu kesalahan procedural (Fitriani et al., 2021). Kesalahan – kesalahan yang terjadi pada prinsipnya mengarah pada kemampuan

kognitif siswa dalam memahami konsep induksi matematika.

Kemampuan kognitif berkaitan dengan cara anak membangun pengetahuannya melalui lingkungan (Maulidiyah, 2016). (Sukholifah, 2014) menyatakan kemampuan kognitif merupakan hasil yang dapat dilihat akibat memperoleh informasi atau pengetahuan. Kemampuan kognitif merupakan Tingkat kemampuan berfikir siswa berdasarkan taraf kompetensi kognitif taksonomi Bloom (mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, mencipta) yang dapat diukur melalui tes pengetahuan. Skala penilaian dan kategori Tingkat kemampuan matematika dijabarkan menjadi: kemampuan matematika tinggi jika $80 \leq \text{nilai} \leq 100$, kemampuan matematika sedang apabila $60 \leq \text{nilai} < 80$, dan kemampuan matematika rendah jika < 60 .

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian yang berjudul “Kemampuan Pembuktian Matematis Siswa Aliyah Menggunakan Induksi Matematika”. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kemampuan pembuktian matematis siswa yang memiliki kategori kognitif tinggi dan rendah menggunakan induksi matematika. Harapan melalui penelitian ini dapat dianalisis lebih jauh kemampuan pembuktian matematis siswa sehingga guru dapat memberikan perlakuan yang tepat pada saat mengajar materi



matematika yang menggunakan prasyarat induksi matematika.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode kualitatif sehingga menghasilkan data diskriptif berupa gambaran tentang kemampuan pembuktian matematis siswa dari hasil jawaban mereka yang berkaitan dengan masalah induksi matematika. Subyek pada penelitian ini adalah siswa MAPK MAN 4 Jombang. Sampel dipilih menggunakan teknik *simple random sampling* berdasarkan hasil penilaian harian induksi matematika.

Dalam penelitian ini instrumen utama adalah peneliti sendiri, Peneliti berperan sebagai pewawancara (*interviewer*) yang dalam hal ini tidak dapat digantikan oleh instrumen lainnya. Instrumen pendukung penelitian ini berupa lembar tes Masalah induksi matematika dan pedoman wawancara subyek. Prosedur penelitian ini adalah subyek diberikan tes masalah induksi matematika untuk mengetahui kemampuan siswa menyelesaikan masalah pembuktian matematis materi induksi matematika, dengan setiap langkah pembuktian tersusun sistematis sesuai dengan konsep. Sedangkan wawancara digunakan untuk mengetahui sejauh mana pemahaman setiap langkah dari jawaban dan penguasaan konsep.

Penelitian diawali dengan memberikan masalah induksi matematika kepada siswa XI MAPK. Hasil pengerjaan siswa kemudian

dikumpulkan dan dikoreksi. Setelah itu diperoleh nilai akhir yang selanjutnya diklasifikasikan berdasarkan kemampuan kognitif siswa. Dari hasil klasifikasi diperoleh empat siswa dengan klasifikasi dua siswa dengan kemampuan matematika tinggi dan dua siswa dengan kemampuan matematika rendah sebagai sampel. Keempat sampel dipilih secara acak berdasarkan nilai yang diperoleh dan kategori kemampuan kognitif. Wawancara dilakukan dengan cara bagi sampel yang terpilih secara berurutan. Hasil tes dan wawancara siswa kemudian dianalisis untuk mengetahui kemampuan dalam mengerjakan masalah pembuktian matematis materi induksi matematika.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Siswa yang mengerjakan masalah materi induksi matematika sebanyak 31 siswa. Nilai tes siswa dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Rekapitulasi Nilai Tes Siswa Enrollment in local colleges, 2005

Nilai	Jumlah Siswa
≥ 80	6
60 – 80	12
< 60	13

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh kesimpulan bahwa siswa dengan kemampuan kognitif tinggi sebanyak 19,4% sedangkan siswa



dengan kemampuan rendah sebanyak 41,9% hal ini berarti siswa dengan kemampuan kognitif rendah lebih banyak daripada siswa dengan kemampuan kognitif tinggi.

Selanjutnya dilakukan analisis dari jawaban keempat siswa sebagai sampel. Keempat siswa terpisah dalam dua kategori kemampuan kognitif yaitu siswa A dan B masuk dalam kategori kemampuan kognitif tinggi, sedangkan siswa C dan D masuk kategori kemampuan kognitif rendah. Pertama yang dilakukan adalah analisis dari hasil jawaban siswa A. hasil jawaban siswa A dapat dilihat pada Gambar 1.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli n
 $1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

1) $n=1$
 $1.2+2.3+3.4+\dots+1.0+1.1=\frac{1}{3}1(1+1)(1+2)$
 $1(2)=\frac{1}{3}1(2)(3)$
 $2=\frac{1}{3}(6)$
 $2=2 \quad \checkmark$

2) $n=k$
 $P(n+1): \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
 $K(k+1): \frac{1}{3}K(K+1)(K+2)$

3) $K=K+1$
 $1.2+2.3+3.4+\dots+K(K+1)+(K+1)(K+1+1)=\frac{1}{3}(K+1)(K+1+1)(K+1+2)$
 $\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+(K+1)(K+2)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $(K+1)\left(\frac{1}{3}K(K+2)+(K+2)\right)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $(K+1)\left(\frac{1}{3}K^2+\frac{2}{3}K+K+2\right)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $(K+1)\left(\frac{1}{3}K^2+\frac{5}{3}K+2\right)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $(K+1)\frac{1}{3}(K^2+5K+6)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3) \quad \checkmark$

Gambar 1. Hasil Jawaban siswa A

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli n
 $1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

① $n(n+1)=\frac{1}{3}n$
 $1(1+1)=\frac{1}{3}1(1+1)(1+2)$
 $2=\frac{1}{3}1(2)(3)$
 $2=\frac{6}{3}$

② $1.2+2.3+3.4+\dots+K(K+1)=\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)$

③ $1.2+2.3+3.4+\dots+K(K+1)+K+1(K+1+1)=\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+K+1(K+1+1)$
 $\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+K+1(K+1+1)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+K+1(K+1+1)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+K+1(K+1+1)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+K+1(K+1+1)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$
 $\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)+K+1(K+1+1)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$

Gambar 2. Hasil Jawaban siswa B

Berdasarkan Gambar 1, kemampuan matematis siswa A menyelesaikan masalah induksi

matematika dengan langkah-langkah induksi matematika menunjukkan nilai sempurna hampir tidak ada kesalahan. Pada saat membuktikan langkah dasar siswa A mampu membuktikan dengan benar meskipun tidak menuliskan akan dibuktikan benar untuk n bilangan asli. Pada langkah induksi siswa A mampu membuktikan dengan sempurna meskipun siswa A tidak menuliskan diasumsikan benar untuk $n=k$ maka akan dibuktikan benar untuk $n=k+1$. Langkah selanjutnya sampai dengan Kesimpulan dapat diselesaikan dengan sempurna.

Analisis berikutnya siswa B yang termasuk dalam kategori kemampuan kognitif tinggi yang dapat dilihat pada gambar 2. Hasil jawaban siswa B menunjukkan kemampuan pembuktian matematis dengan langkah – langkah induksi matematika hampir sempurna. Langkah dasar siswa B dapat membuktikan dengan benar meskipun tidak menuliskan akan dibuktikan benar untuk n bilangan asli. Pada Langkah induksi siswa B dapat membuktikan dengan benar meskipun siswa B tidak menuliskan diasumsikan benar untuk $n=k$ maka akan dibuktikan benar untuk $n=k+1$. Pada Langkah induksi dapat dilihat siswa B dapat membuktikan ruas kiri sama dengan ruas kanan meskipun terbukti sama hasil ruas kiri sama dengan ruas kanan.



Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli n
 $1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

① $n=1$
 $n(n+1)+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
 $1(1+1)+\frac{1}{3} \cdot 1(1+1)(1+2)$
 $1 \cdot 2 + \frac{1}{3}(2)(3)$
 $2+2$

② $n=k$
 $1.2+2.3+3.4+\dots+k(k+1)+\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

③ $n=k+1$
 $1.2+2.3+3.4+\dots+k(k+1)+k+1(k+1)+1+\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
 $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+k+1(k+2)+1+\frac{1}{3}k+1(k+2)$
 $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

Gambar 3. Hasil Jawaban siswa C

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan asli n
 $1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$n=1$
 $u(u+1) = \frac{1}{3}u(u+1)(u+2)$
 $1(1+1) = \frac{1}{3}1(1+1)(1+2)$
 $1 \cdot 2 = \frac{1}{3}(1)(2)(3)$
 $2 = 2$

$n=k$
 $1.2+2.3+3.4+\dots+k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

$n=k+1$
 $1.2+2.3+3.4+\dots+k(k+1)+k+1(k+1)+1 = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+k+1(k+2)+1$

Gambar 4. Hasil Jawaban siswa D

Analisis hasil jawaban siswa dengan kemampuan kognitif rendah, terlihat pada gambar 3. Berdasarkan gambar 3 terlihat siswa C mampu membuktikan Langkah induksi dasar, meskipun siswa C tidak menuliskan akan dibuktikan benar untuk n anggota bilangan asli. Sedangkan pada langkah induksi, siswa C hanya bisa sampai pada diasumsikan benar untuk $n=k$, pada langkah induksi berikutnya, siswa C terhenti pada pembuktian untuk $n=k+1$. Siswa terlihat kebingungan dalam menyelesaikan alur pembuktian. Siswa C hanya menuliskan ruas kiri dan ruas kanan namun tidak ada kelanjutannya.

Analisis jawaban siswa D dengan kemampuan kognitif rendah merupakan analisis terakhir yang terlihat pada gambar 4. Hasil jawaban siswa D pada pembuktian materi induksi matematika diperoleh gambaran siswa mampu membuktikan pada langkah dasar yaitu membuktikan benar untuk n bilangan asli. Pada langkah induksi siswa terhenti hanya mampu mengasumsikan benar untuk $n=k$, sedangkan pada saat membuktikan benar untuk $n=k+1$ terhenti, siswa hanya mampu menuliskan ruas kiri dan kanan, siswa mengalami kesulitan pada langkah pembuktian $n=k+1$.

Hasil jawaban sampel penelitian keempat siswa menunjukkan adanya perbedaan kemampuan pembuktian materi induksi matematika. Perbedaan jelas terlihat pada langkah induksi, sedangkan pada langkah dasar, keempat siswa dapat membuktikan dengan benar.

Dua siswa A dan B dengan kemampuan kognitif tinggi dapat membuktikan materi induksi matematika mulai dari langkah dasar sampai dengan langkah induksi hampir sempurna. Kemampuan mereka dalam pembuktian matematis sudah sangat baik, hal ini dapat ditunjukkan dari penulisan setiap tahapan pembuktian dilakukan dengan benar meskipun tidak menuliskan akan dibuktikan benar untuk $n=1$, diasumsikan benar untuk $n=k$ yang merupakan bagian penting dalam tahap pembuktian, selanjutnya akan dibuktikan benar untuk $n=k+1$.



Dua siswa C dan D yang mempunyai kemampuan kognitif rendah, pada dasarnya mereka memahami langkah dasar pembuktian materi induksi matematika. Dua siswa tersebut mampu membuktikan langkah induksi dengan benar, meskipun tidak menuliskan akan dibuktikan benar untuk n anggota bilangan asli. Kesulitan yang dialami kedua siswa dengan kemampuan kognitif rendah pada saat membuktikan pada langkah induksi. Langkah mereka terhenti pada saat membuktikan $n=k+1$, mereka terkendala pada saat menghubungkan tahapan langkah induksi. Adanya ketidaksesuaian antara tahap asumsi benar untuk $n=k$ dan pembuktian untuk $n=k+1$. Ketidakmampuan timbul karena mereka kurang memahami cara menerapkan Langkah asumsi benar pada Langkah pembuktian untuk $n=k+1$.

Hasil penelitian ini sejalan dengan teori Ahmadi et al (2019) yang menyatakan jenis kesalahan pembuktian matematika yang dilakukan siswa menengah dalam induksi matematika yaitu kesalahan mulai dari langkah ketiga dan setelahnya (transformasi keterampilan proses dan penulisan jawaban) hal ini disebabkan siswa kurang mampu dalam menggunakan pengasumsian pada langkah induksi.

PENUTUP

Simpulan.

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan, peneliti menyimpulkan beberapa hal sebagai berikut;

1. Siswa dengan kemampuan matematis kognitif tinggi mampu menyelesaikan pembuktian induksi matematika baik pada langkah dasar dan langkah induksi dengan sempurna meskipun belum sistematis. Kesalahan terletak pada saat pembuktian langkah induksi. Mereka tidak menuliskan diasumsikan benar untuk $n=k$ dan dibuktikan benar untuk $n=k+1$.
2. Siswa dengan kemampuan matematis kognitif rendah, pada dasarnya sudah bisa menerapkan pada saat membuktikan langkah dasar. Mereka mengalami kesulitan pada saat membuktikan langkah induksi. Hal ini disebabkan karena mereka tidak bisa menghubungkan tahapan langkah induksi. Adanya ketidaksesuaian antara tahap asumsi benar untuk $n=k$ dan pembuktian untuk $n=k+1$. Ketidakmampuan timbul karena mereka kurang memahami cara menerapkan langkah asumsi benar pada Langkah pembuktian untuk $n=k+1$.

Saran

1. Guru matematika perlu menekankan pemahaman langkah-langkah sistematis dalam induksi matematika. khususnya keterkaitan asumsi benar untuk $n=k$ dan pembuktian untuk $n=k+1$.
2. Siswa dengan kemampuan kognitif tinggi dibiasakan menuliskan pembuktian secara runtut. Sedangkan siswa dengan kemampuan kognitif rendah diberikan



latihan bertahap mulai dari bentuk soal sederhana ke bentuk soal yang sulit.

3. Penelitian selanjutnya disarankan melibatkan subyek lebih banyak serta mengkaji faktor lain yang mempengaruhi kemampuan pembuktian matematis.

DAFTAR PUSTAKA

- CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, 1 (1), 33 - 60
- Indah, P., & Nuraeni, R. (2021). Perbandingan Kemampuan Penalaran Deduktif Matematis Melalui Model PBL dan IBL Berdasarkan KAM. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 10(1). <http://journal.institutpendidikan.ac.id/index.php/mosharafa>
- Hasan, B. (2016). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Bukti Menggunakan Induksi Matematika Berdasarkan Teori Pemrosesan Informasi. *Apotema*, 2, 33–40
- Hine, G. (2017). Proof by mathematical induction: Professional practice for secondary teachers.
- Ashkenzi, Y., & Itzkovitch, E. (2014). Proof by mathematical induction. *International Journal of Innovation and Research in Educational Sciences*, 1(3), 2349–5219.
- Michaelson, M. T. (2008). A literature review of pedagogical research on mathematical induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, 22(2), 57.
- Taufik, A. (2016). Diagnosis Kesulitan Mahasiswa di Universitas Kuningan dalam pembuktian Menggunakan Induksi Matematika Beserta Upaya Mengatasinya Menggunakan Scaffolding. *JES-MAT (Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika)*, 2(1).
- Ashkenzi, Y., & Itzkovitch, E. (2014). Proof by mathematical induction. *International Journal of Innovation and Research in Educational Sciences*, 1(3), 2349–5219.
- Ahmadi, Y., Kusumah, Y. S., & Jupri, A. (2019). Analysis of high school students' errors in mathematical proving: The case of mathematical induction. *Journal of Physics: Conference Series*, 1211(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012068>
- Ernawati, & Ilhamuddin. (2020). Deskripsi kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal matematika pokok bahasan induksi matematika. *elta-Pi: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 9.
- Fitriani, D., Halini, & Suratman, D. (2021). Analisis Kesalahan. Siswa. Dalam Pembuktian Pernyataan Matematika Menggunakan Induksi Matematika Di Sekolah Menengah Atas. *Fkip Untan Pontianak*.
- Maulidiyah, E. C. (2016). Peningkatan Kemampuan Kognitif Anak Melalui Kegiatan Membilang Benda Sekitar. *Jurnal Pendidikan Anak*, 5(2).
- Sukholifah. (2014). Kemampuan Kognitif Siswa Menurut Gagne Pada Materi Himpunan Ditinjau Dari Kemampuan Matematika. *MATHEdunesa*, 3(3).